CHAPITRE 1 : INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

HEI 2 - 2015/2016 - Anthony RIDARD

Prérequis

- Intégration sur un segment et primitives usuelles
- Fonctions usuelles et formules trigonométriques
- Limites, croissances comparées, équivalents et développements limités

Table des matières

Les résultats sont énoncés pour un intervalle $[a, b[$ mais ils s'adaptent sans difficulté à un intervalle $]a, b]$.

I. Nature d'une intégrale généralisée

Dans cette section, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Définitions

Définition (un seul problème en une borne infinie : $b = +\infty$)**.**

Soit f continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, on a :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Exemples.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$
3. $\int_0^{+\infty} \sin t\,dt$

Questions.

1. Si $c \in]a, +\infty[$, que pouvons-nous dire des intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$? $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2. Que se passe-t-il si le problème est en $-\infty$? $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt$

Remarques.

- Etudier la nature d'une intégrale généralisée revient à dire si elle converge ou si elle diverge.
- Ne pas confondre la **nature** d'une intégrale généralisée et la **valeur** d'une intégrale généralisée.
- Si on nous demande d'étudier la nature et de calculer la valeur d'une intégrale généralisée, le calcul de la valeur de l'intégrale prouve la convergence de l'intégrale généralisée.

Propriété (divergence grossière)**.**

Soit f continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Si f admet en $+\infty$ une limite non nulle (finie ou infinie), alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge (grossièrement).

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2t+3}\,dt$

Question. Cette condition suffisante de divergence est-elle nécessaire ?

Définition (un seul problème en une borne finie : $b \in \mathbb{R}$)**.**

Soit f continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite réelle quand x tend vers b à gauche.
Dans ce cas, on a :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Exemples.

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt$

Question. Que se passe-t-il si l'on remplace $[a, b[$ par $]a, b]$? $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$

Propriété (convergence triviale)**.**

Soit f continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.
Si f admet une limite à gauche réelle en b, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge (trivialement).

Exemple. $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$

Question. Cette condition suffisante de convergence est-elle nécessaire ?

Définition (un seul problème à l'intérieur de l'intervalle)**.**

Soit f continue sur $[a,c[\cup]c,b]$ avec $-\infty < a < c < b < +\infty$.
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\;dt$ diverge.

Exemples.

1. $\int_{-1}^1 \frac{1}{t}\,dt$
2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,dt$

Définition (plusieurs problèmes)**.**

Soit f continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge s'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\;dt$ diverge.

Questions.

1. La nature de l'intégrale dépend-elle du choix de c ?
2. Que signifie "le cas contraire"' ?

Exemples.

1. $\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)}\,dt$
2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

2. Exemples de référence

Propriété (intégrales de Riemann)**.**

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Question. Que se passe-t-il si l'on remplace la borne 1 par un autre réel strictement positif ?

Propriété (intégrale d'une exponentielle)**.**

Si $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge.

Questions.

1. Que se passe-t-il si l'on remplace la borne 0 par un autre réel ?
2. Que se passe-t-il si $a \leq 0$?

II. Premières méthodes

Dans cette section, f désigne une fonction réelle continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

1. Linéarité

Propriété.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)\,dt$ ont même nature.
  En cas de convergence, on a :
$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$$
- Soit g continue sur $[a,b[$. Si deux des trois intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b (f+g)(t)\,dt$ convergent, alors la troisième converge et on a :
$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f+g)(t)\,dt$$

Questions.

1. Que se passe-t-il si, sur les trois intégrales, une converge et une diverge ?
2. Une combinaison linéaire de deux intégrales divergentes est-elle divergente ?
   On pourra considérer $A = \int_1^{+\infty} t\,dt$, $B = \int_1^{+\infty} \frac{t^3+1}{t^2}\,dt$ et $C = A - B$.

2. Intégration par parties

Théorème.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b[$.
Si uv admet une limite réelle en b à gauche, alors les intégrales $\int_a^b (u'v)(t)\,dt$ et $\int_a^b (uv')(t)\,dt$ ont même nature.
En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b (u'v)(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} uv(x) - uv(a) - \int_a^b (uv')(t)\,dt$$

Exemples.

1. $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$
2. $\int_0^1 \ln t\,dt$

Remarque. On peut aussi revenir à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée : on utilise alors l'intégration par parties des intégrales non généralisées puis on passe à la limite.

3. Changements de variable

Théorème (changement de variable direct)**.**

S'il existe θ de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b[$ admettant une limite l (finie ou infinie) en b à gauche, et g continue sur $\theta([a,b[)$ telles que $f = (g\circ\theta)\theta'$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_{\theta(a)}^l g(u)\,du$ ont même nature.
En cas de convergence, elles sont égales.

Exemple. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t(1+\sin t)}\,dt$ (poser $x = \sin t$)

Voici une application (à compléter) très pratique :

Propriété (intégrales de Riemann en a)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$.
- $\int_{a+1}^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \cdots$
- $\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \cdots$

Théorème (changement de variable bijectif)**.**

S'il existe une bijection $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi(u))\varphi'(u)\, du$ ont même nature.
En cas de convergence, elles sont égales.

Question. Que se passe-t-il si la bijection est décroissante ?

Exemple. $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt$ (poser $t = \sin^2 x$)

Remarque. Là encore, on peut revenir à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée : on utilise alors les changements de variable des intégrales non généralisées puis on passe à la limite.

III. Cas des fonctions positives

Dans cette section, f désigne une fonction réelle continue et positive sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

1. Une CNS de convergence

Le théorème de la limite monotone entraîne :

Propriété.

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée sur $[a, b[$.

2. Des théorèmes de comparaison

Théorème (de majoration et minoration)**.**

Soit g une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\forall t \in [a, b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge aussi
- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge aussi

Questions.

1. Que se passe-t-il si la positivité, l'inégalité ou la convergence n'est vraie que sur $[c, b[\subset [a, b[$?
2. Que se passe-t-il si la fonction est négative ? change de signe ?

Exemples.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt$
3. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt$ (on pourra utiliser les croissances comparées et la définition d'une limite)

Théorème (d'équivalence)**.**

Si f est équivalente à une fonction g de signe constant au voisinage de b^-, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ ont même nature.

Questions.

1. Que se passe-t-il si la fonction g change de signe ?
2. Quel est l'inconvénient principal de ces méthodes de comparaison ?

Exemples.

1. $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$

IV. Cas des fonctions réelles ou complexes

1. Cas complexe

Soit f une fonction complexe continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Définition.

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \Re(f(t))\,dt$ et $\int_a^b \Im(f(t))\,dt$ convergent.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \Re(f(t))\,dt + i\int_a^b \Im(f(t))\,dt$$

Exemple. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt$

2. Convergence absolue

Soit f une fonction réelle ou complexe continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Définition (convergence absolue)**.**

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Exemples.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\,dt$

Propriété.

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors elle converge et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Question. Cette condition suffisante de convergence est-elle nécessaire ?
On pourra considérer $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt$

Définition (semi-convergence)**.**

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.